

## Résolution de problèmes - Analyse numérique

---

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.  
Les documents sont interdits.  
Durée : 2h.

---

### Exercice 1.

1. Soient  $a > 0$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}.$$

- a. Montrer que la suite est bien définie et est strictement positive.  
b. On note  $l = \sqrt{a}$ . Montrer que

$$|x_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|x_n - l|.$$

- c. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.  
2. Soit  $D$  une matrice carrée diagonale dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On définit la suite de matrices  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$D_0 = D, \quad D_{n+1} = \frac{1}{2}D_n + \frac{1}{2}D_n^{-1}D.$$

Montrer que la suite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

3. Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. On définit la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$A_0 = A, \quad A_{n+1} = \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2}A_n^{-1}A.$$

Montrer que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 2.

1. On considère les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

- a. Montrer que  $A_1$  est diagonalisable.  
b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A_1$ .  
c. Donner l'expression d'une matrice orthogonale  $P$  et d'une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$  telle que  $\lambda < \mu$  et  $P^\top A_1 P = D$ .  
d. En déduire que  $A_1$  est symétrique définie positive.  
e. Démontrer directement que pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $X^\top A_2 X \geq 0$  mais que  $A_2$  n'est pas définie positive.

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice inversible  $M$  telle que  $A = M^\top M$ .
3. Soit  $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$  la famille de vecteurs colonne d'une matrice inversible  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - a. Justifier que  $\mathcal{V}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  et montrer que l'on peut construire une famille  $\mathcal{W}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :
    - $(w_1, \dots, w_n)$  est orthonormée
    - $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$
  - b. Montrer que la matrice de passage  $T$  de la base  $\mathcal{W}$  à la base  $\mathcal{V}$  est triangulaire supérieure.
  - c. Soit  $O$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{W}$ . Justifier que  $O$  est orthogonale et que  $M = OT$ .
4. Dédire de 2. et 3. que toute matrice  $A$  symétrique définie positive peut s'écrire sous la forme  $A = T^\top T$  où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure inversible. Y-a-t il unicité de cette écriture ?
5. Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice symétrique définie positive et  $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice triangulaire supérieure inversible telle que  $A = T^\top T$ .
  - a. Démontrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}, 0 < t_{ii}^2 \leq a_{ii}$ .
  - b. En déduire que

$$0 < \det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

### Exercice 3.

Soient  $x = (x_1, \dots, x_N)$  et  $y = (y_1, \dots, y_N)$  deux points de  $\mathbb{R}^N$  tels que  $x_1 < \dots < x_N$ . On note  $\mathbf{1}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  composé uniquement de 1. On s'intéresse à la quantité

$$\alpha = \inf \left\{ \sum_{k=1}^N |y_k - (ax_k + b)|^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. On note  $\mathcal{P} = \text{Vect}(\mathbf{1}, x)$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^N$ . Montrer que

$$\alpha = \inf \{ \|y - u\|^2, u \in \mathcal{P} \} = \inf \{ \|y - Av\|^2, v \in \mathbb{R}^2 \} \quad (1)$$

où  $A$  est la matrice à  $n$  lignes et 2 colonnes

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Justifier l'existence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y - u_n\|^2 = \alpha.$$

3. Montrer l'existence d'une valeur d'adhérence à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. En utilisant la question précédente, montrer que les deux bornes inférieures dans (1) sont atteintes.
5. Calculer la différentielle de la fonction  $f$  définie par  $f(w) = \|y - Aw\|^2$ .
6. En déduire que tous les éléments  $w \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\alpha = \|y - Aw\|^2$  vérifie

$$A^\top Aw = A^\top y.$$

7. En déduire qu'il existe un unique couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\alpha = \sum_{k=1}^N |y_k - (ax_k + b)|^2.$$